8.4.1 Pojem limita posloupnosti

Předpoklady: 010305, 080107

Pedagogická poznámka: Limita posloupnosti není pro studenty snadno stravitelným pojmem. Hlavním problémem je podle mých zkušeností nedorozumění s tím, zda mezi posloupností a její limitou zůstává „díra“ nebo ne. Příčinou toho všeho je zřejmě špatné pochopení pojmu nekonečna, kdy část studentů vnímá nekonečno jako nějaké obrovské, největší, ale přesto v podstatě normální číslo. Proto je na první polovinu hodiny zařazeno opakování o nekonečnu z prvního ročníku.

Vzpomínky na nekonečno:

Problém: Jak určit počet prvků u nekonečných množin?
Řešení (částečné): Pospojujeme prvky množiny A s prvky množiny B vzájemně jednoznačně (Každý prvek A má právě jeden prvek množiny B a obráceně. Analogie vytváření párů při tanci. V každé dvojici je právě jeden kluk a právě jedna holka).
Pokud ani v jedné množině nezůstane žádný prvek bez partnera z druhé množiny, je počet prvků v obou množinách stejný.
(Jakmile na tanečních proběhne volenka a utvoří se páry, hned vidíme, jestli bylo stejně kluků a holek.)
Tak budeme moci porovnávat nekonečné množiny mezi sebou.

Př. 1: Porovnej počet přirozených a sudých přirozených čísel.

Na první pohled to vypadá, že přirozených je dvakrát víc (polovina čísel u sudých chybí). Omyl.

přirozená čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

sudá čísla: 2, 4, 6, 8, 10, ...

Žádné číslo nezbylo na ocet $\Rightarrow$ sudých čísel je stejný počet jako čísel přirozených.

Vypadá to velmi divně. Může za to nekonečno:
- Nekonečno není nějaké obyčejné jen největší číslo, ale je to něco úplně jiného.
- Řada přirozených čísel nemá poslední člen, za každým číslem bezprostředně následuje další o jednu větší.

$\Rightarrow$ Pokud chceme přemýšlet o nekonečnu, musíme být opatrní a vzdát se některých představ souvisejících s konečnými čísly.

Hilbertův hotel
Je hotel s nekonečně mnoha jednolůžkovými pokoji. Pokoje jsou očíslovány přirozenými čísly. Hotel je plně obsazen, v každém pokoji je jeden host. Na recepci se dostaví tři turisté a chtějí se také ubytovat. Je možné jim poskytnout ubytování, aniž bychom někoho z ubytovaných vystěhovali pryč z hotelu?
Ano, všichni ubytovaní opustí svůj pokoj a nastěhují se do pokoje s číslem o 3 větším $\Rightarrow$ pokoje 1, 2, 3 jsou volné a je možné do nich ubytovat další zájemce.
Stejným způsobem je možné ubytovat každý konečný počet turistů.

Je možné v obsazeném hotelu ubytovat nekonečně mnoho turistů?
Stačí, aby se všichni přestěhovali na pokoj, jehož číslo je dvakrát větší. Všechny liché pokoje zůstanou volné.

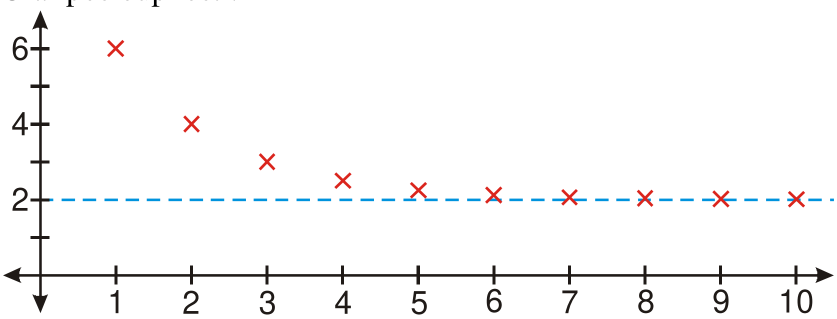
- Když k nekonečnu přičteme konečné číslo (libovolně velké), nekonečno se nezmění.
- Když půjdeme po nekonečné přímce, v jakékoliv vzdálenosti od počátku své cesty budeme od cíle pořád stejně daleko, pořád nám bude scházet nekonečně velká vzdálenost, i když od startu budeme dál.

$\Rightarrow$ **Představu o situaci v nekonečnu nezískáme tím, že si představíme situaci pro nějaké hodně velké číslo, ale spíše tím, že budeme zkoumat, jak se situace mění a k čemu směřuje, když se čísla postupně zvětšují a tím se blíží k nekonečnu.**

Po vzpomínkách na dávnou vzpomínky na nedávnou minulost:
Když jsme rozhodovali o omezenosti posloupností, zjistili jsme, že členy některých posloupností (například $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$) se pro neustále se zvětšující n čím dál více blíží k nějakým číslům (členy posloupnosti $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ se neustále přibližovaly číslu 2).

Př. 2: Je dána posloupnost $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$. Odhadni, ke kterému číslu se blíží její členy, když se n blíží k nekonečnu. Nakresli graf této posloupnosti pro $n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Při zvětšování hodnoty n ve výrazu pro člen posloupnosti se snižuje vliv ostatních členů $\Rightarrow$ ve výrazu $\frac{8}{2^n}+2$ se zvětšuje jmenovatel zlomku a výraz se postupně přibližuje výrazu $0+2=2$ $\Rightarrow$ členy posloupnosti se blíží k číslu 2.
Prvních deset členů posloupnosti: $6;4;3;2\frac{1}{2};2\frac{1}{4};2\frac{1}{8};2\frac{1}{16};2\frac{1}{32};2\frac{1}{64};2\frac{1}{128}$
Graf posloupnosti:

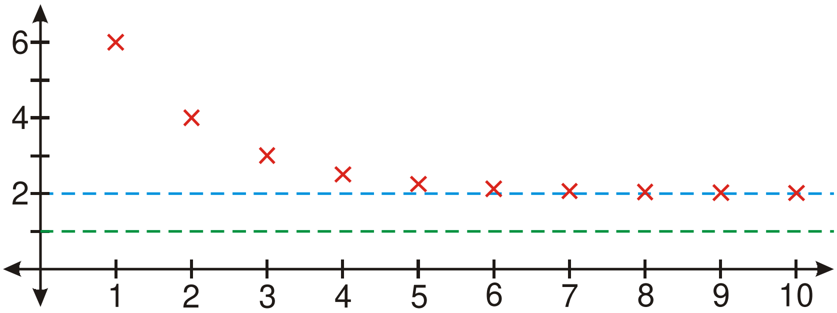


Žádný z členů posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ se nerovná 2, přesto hraje číslo 2 pro členy posloupnosti důležitou roli jako číslo, ke kterému členy posloupnosti „směřují" („blíží se k němu"). Takovému číslu se říká **limita posloupnosti.** Posloupnosti, která má limitu, říkáme **konvergentní posloupnost**.

Rozhodně nejsme hotoví:

- Nevíme, jak vyjádřit „směřují“, „blíží se k“ matematicky a jednoznačně

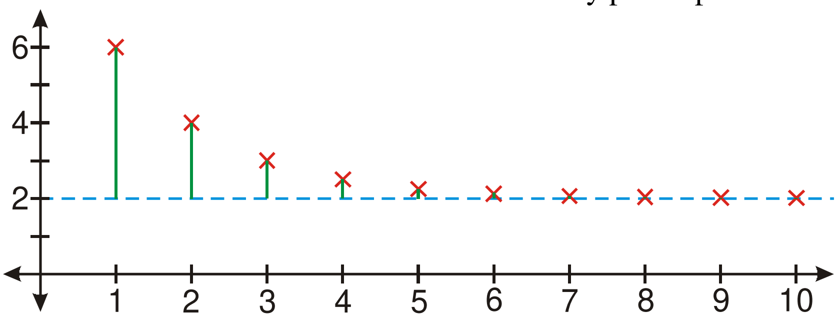
Nemohli bychom říct, že posloupnost $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ se blíží i k jinému číslu než 2, třeba k 1?



Z obrázku je vidět, že členy posloupnosti se sice blíží i k 1, ale jinak než ke 2.

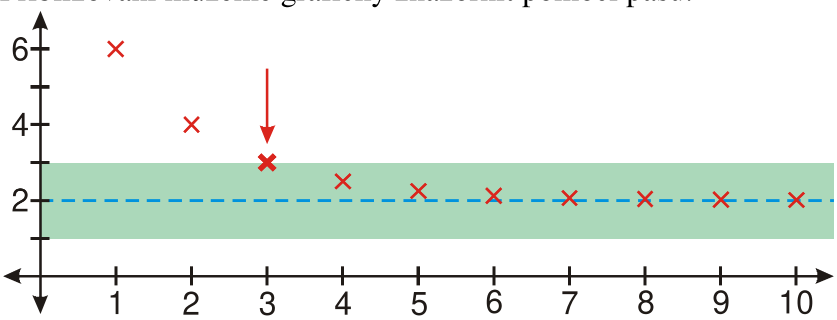
- k 1 se členy sice blíží, ale mezi posloupností a číslem 1 zůstává volné místo (čísel, ke kterým se posloupnost blíží stejným způsobem jako se blíží k 1, je nekonečně mnoho, jde například o všechna záporná čísla)
- k 2 se členy posloupnosti blíží tak, že mezi posloupností a číslem 2 „žádné místo nezůstává“ a tímto způsobem se posloupnost blíží pouze k číslu 2.

Co matematicky znamená, že mezi posloupností a číslem 2 „není žádné místo“?
Dokreslíme do obrázku vzdálenosti mezi členy posloupnosti a číslem 2:



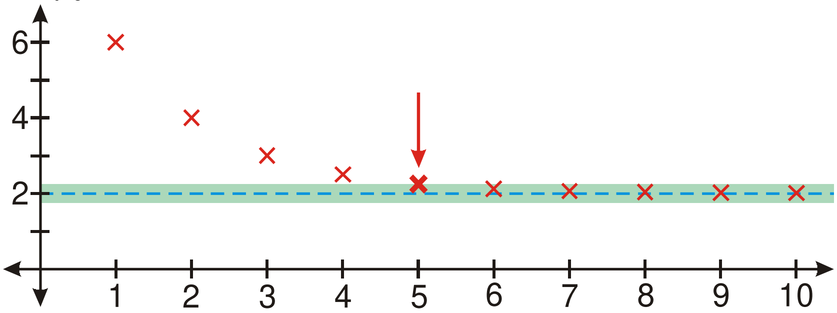
$\Rightarrow$ vzdálenost členů posloupnosti od 2 se neustále zmenšuje a blíží se k nule
$\Rightarrow$ ještě musíme zajistit, aby se trend přibližování nezměnil $\Rightarrow$ musí existovat člen takový, že všechny následující členy posloupnosti budou k 2 blíže, než on (to není problém naší konkrétní posloupnosti)

Přibližování můžeme graficky znázornit pomocí pásu.



Nakreslíme-li si kolem dvojky libovolně široký pás, vždy najedeme takové a_n, že všechny členy posloupnosti za ním, už jsou uvnitř pásu.

Pro pás o "poloměru" 1 (a tedy šířce 2) je takovým a_n a_4 (člen a_3 je od 2 vzdálen o 1, další členy jsou blíže).



Pro pás o „poloměru" 0,25 (a tedy šířce 0,5) je takovým a_n a_6 (člen a_5 je od 2 vzdálen o 0,25, další členy jsou blíže).

Teď už můžeme zformulovat definici:

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslu a říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Skutečnost, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, píšeme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (čteme: „limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu je rovna a“, stručněji „limita a_n je a“.

Konkrétně v našem případě: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{8}{2^n} + 2 \right) = 2$.

Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní**.

Př. 3: Podívej se na obrázek grafu posloupnosti s vyznačených širším pásem a sepiš konkrétní hodnoty všech čísel zmiňovaných v definici konvergentní posloupnosti.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	$\Leftrightarrow$	$\left(\frac{8}{2^n} + 2 \right)_{n=1}^{\infty}$	předpis posloupnosti
a	$\Leftrightarrow$	2	hodnota limity, ke které se blíží členy posloupnosti
ε	$\Leftrightarrow$	1	vzdálenost od limity, polovina šířky pásu
n_0	$\Leftrightarrow$	4	index prvního členu posloupnosti, který je dostatečně blízko (uvnitř pásu)
a_n	$\Leftrightarrow$	všechny členy posloupnosti za a_4 (včetně)	členy posloupnosti, které splňují podmínku vzdálenosti od limity

Pedagogická poznámka: Jen velmi malá část studentů dokáže vyřešit předchozí příklad zcela samostatně. Nemá tedy cenu příliš dlouho čekat s pomocí. U následujícího příkladu je situace již podstatně lepší.

Př. 4: Podívej se na obrázek grafu posloupnosti s vyznačených užším pásem a sepiš konkrétní hodnoty všech čísel zmiňovaných v definici konvergentní posloupnosti.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	$\Leftrightarrow$	$\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$	předpis posloupnosti
a	$\Leftrightarrow$	2	hodnota limity, ke které se blíží členy posloupnosti
ε	$\Leftrightarrow$	0,25	vzdálenost od limity, polovina šířky pásu
n_0	$\Leftrightarrow$	6	index prvního členu posloupnosti, který je dostatečně blízko (uvnitř pásu)
a_n	$\Leftrightarrow$	všechny členy posloupnosti za a_6 (včetně)	členy posloupnosti, které splňují podmínku vzdálenosti od limity

Další možnosti jak definovat limitu posloupnosti:

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Číslu a říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Stejná definice jako předchozí, mimo posledních slov. V této definici se nezabýváme vzdáleností členu a_n od limity a, ale tím, že a_n náleží do intervalu $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ (interval čísel, která jsou od limity a vzdálena méně než ε).

Shrnutí: Mezi posloupností a její limitou „nezůstává žádné volné místo“.